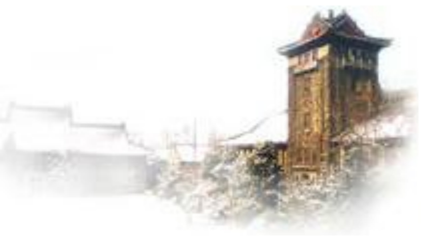
第五章 极限定理



“ 概率论的认识论价值只有通过极限定理才能被揭示，没有极限定理就不可能去理解概率论的基本概念的真正含义”

-Kolmogorov

§ 5.1 大数定律

- **定义：** 设$\{X_n\}$是一随机变量序列, X是一随机变量,若对任意ε>0,都有

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$$

或

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

则称X_n是依概率收敛于X，记为 $X_n \xrightarrow{P} X.$

- 定义：设{X_n}是一随机变量序列, 若

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - EX_i) \xrightarrow{P} 0$$

则称{X_n}服从大数定律。

- **定理5.1（ 切比雪夫大数定理）**：设随机变量序列 $\{X_n\}$ 两两不相关，且存在常数C,使得 $D(X_k)<C(k=1,2,\ldots)$, 则$\{X_n\}$ 服从大数定律，即：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - EX_i)\xrightarrow{P}0$$

- **定理5.2（辛钦大数定理）**：设随机变量序列$\{X_n\}$相互独立同分布，且具有数学期望$E(X_k)=\mu$ (k=1,2, …)，则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mu$$

- **例5.1**： 以上述思想方法，计算定积分$\int_0^1 f(x)dx$
- **解**： 设X服从[0,1]上的均匀分布，则

$$Ef(X)=\int_0^1 f(x)dx$$

在计算机上用随机数发生器产生n个[0,1]区间上均匀分布的随机数x_1，x_2，…，x_n，便有

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

- **定理5.3（伯努利大数定理）：** 设n_A是n次独立重复试验中事件A发生的次数。p是事件A在每次试验中发生的概率，则

$$\frac{n_A}{n} \xrightarrow{P} p$$

§5.2 中心极限定理

- **定义：** 设$\{X_n\}$是一随机变量序列，分布函数为 $F_n(x)$。X是一随机变量，分布函数为F(x)。若对F(x)的任意连续点x，都有

$$F_n(x) \to F(x)$$

则称$\{X_n\}$**依分布收敛**于X，记为$X_n \xrightarrow{d} X$ 。

- **定义：** 设$\{X_n\}$是一独立随机变量序列随机变量 $D(X_n)<\infty(n=1,2,\ldots)$，若

$$Y_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k-EX_k)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)}}\xrightarrow{d}N(0,1)$$

即对任意$x\in R$，有

$$\lim_{n\to\infty}F_{Y_n}(x)=\lim_{n\to\infty}P\left(Y_n\le x\right)$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt=\Phi(x)$$

则称$\{X_n\}$服从**中心极限定理**。

- **定理5.4（独立同分布的中心极限定理）** 设$\{X_n\}$是一独立同分布随机变量序列随机变量，$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$相互独立，且具有相同的数学期望和方差。$E(X_k)=\mu$，$D(X_k)=\sigma^2 (k=1,2,\ldots)$，则$\{X_n\}$服从中心极限定理。即

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

近似计算

- 由定理5.4知：

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \approx N(0,1)$$

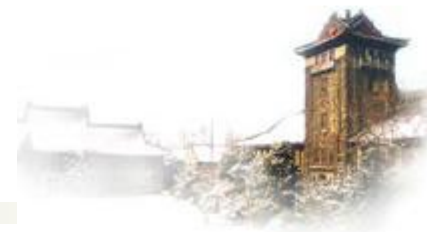
- 或

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \approx N(n\mu, n\sigma^2)$$

- 例5.2：一信号接收器同时收到20个信号电压，设它们互相独立均服从均匀分布U(0,10)，求电压之和大于105的概率。
- 解：

$$P(\sum_{k=1}^{20} V_k \geq 105) = P(\frac{\sum_{k=1}^{20} V_k - 20\times EV_k}{\sqrt{20\times DV_k}} \geq \frac{105-20\times EV_k}{\sqrt{20\times DV_k}})$$

$$= P(\frac{\sum_{k=1}^{20} V_k - 100}{\sqrt{500/3}} \geq \frac{105-100}{\sqrt{500/3}}) \approx 1-\Phi(0.39) = 0.3483$$



- **定理5.5（棣莫弗—拉普拉斯积分极限定理）：** 设随机变量μ_n~B(n, p)，则对于任意实数x有：

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \Phi(x)$$

- **例5.3**：某公司有100名员工参加一种资格考试，根据以往经验考试通过率为0.8，试计算这100名员工至少有75人通过考试的概率。
- **解**：

$$P(\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 75) = P(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100\times 0.8}{\sqrt{100\times 0.8\times 0.2}} \geq \frac{75-80}{\sqrt{16}})$$

$$\approx 1-\Phi(-1.25) = 0.8944$$

中心极限定理较大数定律更精确

- 由大数定律知：

$$P(|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu|<\varepsilon)\to 1$$

- 由中心极限定理：

$$P(|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu|<\varepsilon)=P(|\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}|<\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma})$$

$$\approx \Phi(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma})-\Phi(-\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma})=2\Phi(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma})-1\to 1$$